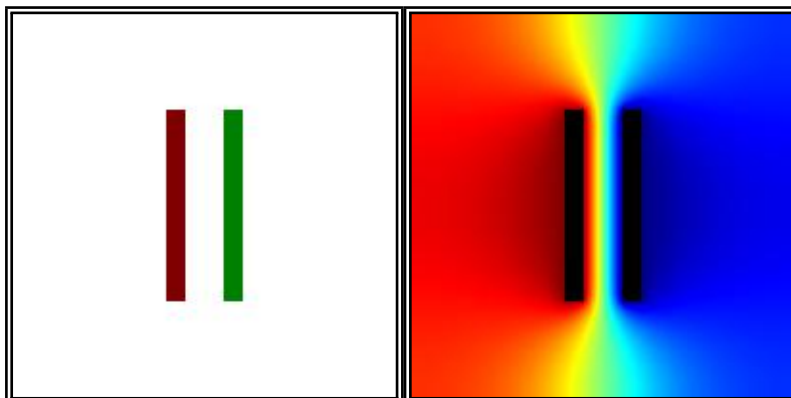


1

## Liebmann technical documentation

2



3

Determination of electric field distribution in vacuum by  
using relaxation method.

4

5

(English version / wersja angielska)

6

author: Marcin Kulbaka

7

email: mkulbaka@onet.pl

8

project homepage: [http://marcinkulbaka.prv.pl/Liebmann/index\\_en.html](http://marcinkulbaka.prv.pl/Liebmann/index_en.html)

9

license: GNU General Public License v.3.0+

10

**version 4**

11

**2024.10.15**

12

University of Maria Curie - Skłodowska in Lublin, Poland

13	<b>Contents</b>	
14	<b>1 Liebmann technical documentation series</b>	<b>2</b>
15	<b>2 Versions of this document</b>	<b>2</b>
16	<b>3 Explanation of symbols in calculations</b>	<b>2</b>
17	<b>4 Laplace equation</b>	<b>3</b>
18	4.1 Equations of electromagnetism . . . . .	3
19	4.2 Prawo Gaussa w ujęciu całkowym . . . . .	3
20	4.3 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa . . . . .	4
21	4.4 Dywergencja . . . . .	4
22	4.5 Związki pomiędzy indukcją pola elektrycznego na natężeniem 23 pola elektrycznego . . . . .	4
24	4.6 Gradient . . . . .	4
25	4.7 Prawo Gaussa w ujęciu różniczkowym . . . . .	4
26	4.8 Równanie Poissona . . . . .	5
27	4.9 Równanie Laplace'a . . . . .	5
28	<b>5 Solving Laplace equation using relaxation method</b>	<b>6</b>
29	<b>6 Mesh XY - type D</b>	<b>7</b>
30	<b>7 Example of D-type mesh in ANSI C</b>	<b>8</b>

## 31 1 Liebmann technical documentation series

- 32 1. Wyznaczanie rozkładu pola elektrostatycznego w próżni metodą relak-  
33 sacyjną Liebmannna. (Polish version / wersja polska)
- 34 2. Determination of electrostatic field distribution by using Liebmann relax-  
35 ation method. (English version / wersja angielska)
- 36 3. Graphics. Mapping voltages to colours (colormaps)
- 37 4. Laplace equation 2D (XY). (Cartesian coordinates). Relaxation scheme  
38 explained (5 - point star)
- 39 5. Laplace equation 2D (ZR). (Cylindrical coordinates). Relaxation scheme  
40 explained (5 - point star)
- 41 6. Liebmann source code. (ANSI C programming language)

## 42 2 Versions of this document

- 43 1. version 1 - 2023.11.03
- 44 2. version 2 - 2024.01.26
- 45 3. version 3 - 2024.05.24
- 46 4. version 4 - 2024.10.15

## 47 3 Explanation of symbols in calculations

- 48 •  $P_i$  -  $i$ -th mesh node
- 49 •  $V_i$  - value of electrostatic potential at node  $P_i$ . Unit - [V]
- 50 •  $h$  - mesh step (for example  $h_x$  - mesh step in  $x$  direction). Unit - [mm]
- 51 •  $g_{i+/-}$  - gradient in direction  $i$  (for example  $g_{1x-} = \frac{V_1 - V_{1x-}}{h_x}$  . Unit -  $\left[\frac{V}{mm}\right]$
- 52 •  $i_{row}$  - index of row in mesh. Values of  $i_{row} = 1, 2, \dots, \text{size\_row}$
- 53 •  $i_{col}$  - index of column in mesh. Values of  $i_{col} = 1, 2, \dots, \text{size\_col}$

## 54 4 Laplace equation

### 55 4.1 Equations of electromagnetism

56 Classical electrodynamics uses laws of Maxwell. These laws can be described  
57 in two forms.

- 58 • differential form
- 59 • integral form

60 Do opisu pola elektrostatycznego wykorzystamy prawo Gaussa. Do przek-  
61 ształcenia postaci całkowej w różniczkową posłuży prawo Ostrogradskiego -  
62 Gaussa.

### 63 4.2 Prawo Gaussa w ujęciu całkowym

64 Uwaga. Tutaj  $V$  oznacza objętość.

65 Treść prawa Gaussa w ujęciu całkowym.

66 Strumień natężenia pola elektrycznego  $\vec{D}$  przenikający przez zamkniętą  
67 powierzchnię  $S$ , ograniczającą obszar o objętości  $V$  jest równy całkowitemu  
68 ładunkowi elektrycznemu  $Q$  zawartemu w tej objętości.

$$\Phi_D = \oint_s \vec{D}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{S} = Q \quad (4.1)$$

69 Ładunek elektryczny w objętość  $V$  jest opisany zależnością:

$$\int_V \rho_{(\vec{r})} dV = Q \quad (4.2)$$

70 Tzn. całka z gęstości ładunku elektrycznego po objętości  $V$  jest równa  
71 całkowitemu ładunkowi elektrycznemu znajdującemu się w tej objętości  $V$ .

72 Opracowano na podstawie Wikipedii [1] (dostęp 2024.07.19).

73 Pomiędzy indukcją pola elektrycznego a indukcją pola elektrycznego za-  
74 chodzi związek:

$$\vec{D}_{(\vec{r})} = \epsilon_{(\vec{r})} \vec{E} \quad (4.3)$$

75 Dla ośrodka izotropowego zachodzi związek:

$$\epsilon_{(\vec{r})} = \epsilon_0 \epsilon_{r(\vec{r})} \quad (4.4)$$

76 Opracowano na podstawie: Nagel 2012 [2]

### 77 4.3 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa

78 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa

79 Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa umożliwia zamianę całki powierzch-  
80 niowej na objętościową (potrójną) i na odwrót. Twierdzenie Ostrogradskiego -  
81 Gaussa ma postać.

$$\oint_s \vec{D}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{S} = \int_V \left( \nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} \right) dV \quad (4.5)$$

### 82 4.4 Dywergencja

83 Można to zapisać przy pomocy operatora dywergencji:

$$\text{div} \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} \quad (4.6)$$

84 Opracowano na podstawie Wikipedii: [3] oraz [4].

### 85 4.5 Związki pomiędzy indukcją pola elektrycznego na natężeniem 86 pola elektrycznego

$$\vec{D}_{(\vec{r})} = \epsilon_{(\vec{r})} \vec{E}_{(\vec{r})} \quad (4.7)$$

$$\epsilon_{(\vec{r})} = \epsilon_0 \epsilon_{r(\vec{r})} \quad (4.8)$$

### 87 4.6 Gradient

88 Natężenie pola elektrostatycznego można przedstawić jako gradient potencjału  
89 pola elektrostatycznego:

$$\vec{E}_{(\vec{r})} = -\nabla V_{(\vec{r})} \quad (4.9)$$

### 90 4.7 Prawo Gaussa w ujęciu różniczkowym

91 Przypomnijmy twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa:

$$\oint_s \vec{D}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{S} = \int_V \left( \nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} \right) dV \quad (4.10)$$

92 Obie całki są równe całkowitemu ładunkowi ( $Q$ ) wewnątrz opisywanej obję-  
93 tości ( $V$ ), jak zostało opisane poprzednio:

$$\int_V \rho_{(\vec{r})} dV = Q \quad (4.11)$$

94 Zatem można napisać, że

$$\int_V \left( \nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} \right) dV = \int_V \rho_{(\vec{r})} dV \quad (4.12)$$

95 Porównajmy te całki po objętości. Skoro te całki są równe, to wyrażenia  
96 podcałkowe również są sobie równe. Otrzymaliśmy związek:

$$\nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} = \rho_{(\vec{r})} \quad (4.13)$$

## 97 4.8 Równanie Poissona

98 Aby otrzymać równanie Poissona i Laplace'a musimy jeszcze przedstawić wek-  
99 tor indukcji pola elektrostatycznego  $\vec{D}_{(\vec{r})}$  przez gradient potencjału elektrostaty-  
100 cznego ( $V$ ).

$$\vec{E}_{(\vec{r})} = -\nabla V_{(\vec{r})} \quad (4.14)$$

101 Po wstawieniu otrzymujemy:

$$\nabla \cdot \left( \epsilon_{r(\vec{r})} \nabla V_{(\vec{r})} \right) = -\frac{\rho_{(\vec{r})}}{\epsilon_0} \quad (4.15)$$

102 Dla ośrodka izotropowego dielektrycznie zachodzi zależność.

$$\epsilon_{(\vec{r})} = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (4.16)$$

103 Otrzymujemy równanie Poissona w najbardziej typowej postaci:

$$\nabla^2 V_{(\vec{r})} = -\frac{\rho_{(\vec{r})}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (4.17)$$

104 Opracowano na podstawie: Nagel 2012 [2]

## 105 4.9 Równanie Laplace'a

106 Równanie Laplace'a jest szczególnym przypadkiem równania Poissona. Jest  
107 słuszne, kiedy w danym punkcie przestrzeni nie ma ładunku elektrycznego,  
108 bądź można go zaniedbać. Przykładem może być próżnia i metalowe elektrody  
109 wytwarzające pole. Zostanie to potem pokazane w przykładach praktycznych.

110 Jeżeli w równaniu Poissona zaniedbamy gęstość ładunku elektrycznego  
111 ( $\rho_{(\vec{r})} = 0$ ), wówczas otrzymujemy równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 V_{(\vec{r})} = 0 \quad (4.18)$$

## 112 5 Solving Laplace equation using relaxation method

113 I tried to solve Laplace equation using mainly information from Pierre Grivet's  
114 book (Electron Optics) - [5].

115 There are few editions of this book (1965, 1972). Second edition (1972) con-  
116 tains explanation of relaxation method (page 38).

117 More generalized approaches has been drafted by James R. Nagel - [2].  
118 <https://my.ece.utah.edu/~ece6340/LECTURES/Feb1/> (visited 2023-03-01).

119  
120 There are also publications edited by Albert Septier: Focusing of Charged  
121 Particles [6] and Applied Charged Particle Optics (part A). [7].

122 I have also found some ideas in publication of D W O Heddle: Electrostatic  
123 Lens Systems [8] (especially using PC computers to solve electrostatic prob-  
124 lems).

125 I have also found (brief) description of by - hand solving of Laplace equa-  
126 tion by Bohdan Paszkowski - [9] (Polish edition). English translation of this book  
127 also exists - [10].

128  
129 I would like to thank many people, who helped me with this challenge. Espe-  
130 cially prof. dr hab. Mieczysław Jałochowski (supervisor of my master's thesis),  
131 who enabled me to use SIMION and MATLAB software while writing master's  
132 thesis about electron optical systems at University of Maria Curie - Skłodowska  
133 in Lublin in 2008. I would also thank to prof. Marcin Turek for fruitful discus-  
134 sion about numerical methods. What is more, my colleague Bartosz in 2012  
135 had explained me general problems with software efficiency. So he had also  
136 contributed significantly to the idea of Liebmann software (especially using C  
137 language).

138 **6 Mesh XY - type D**

139  $h_x = h_y = h$

140 gradient  $V$  outside a mesh does not exist

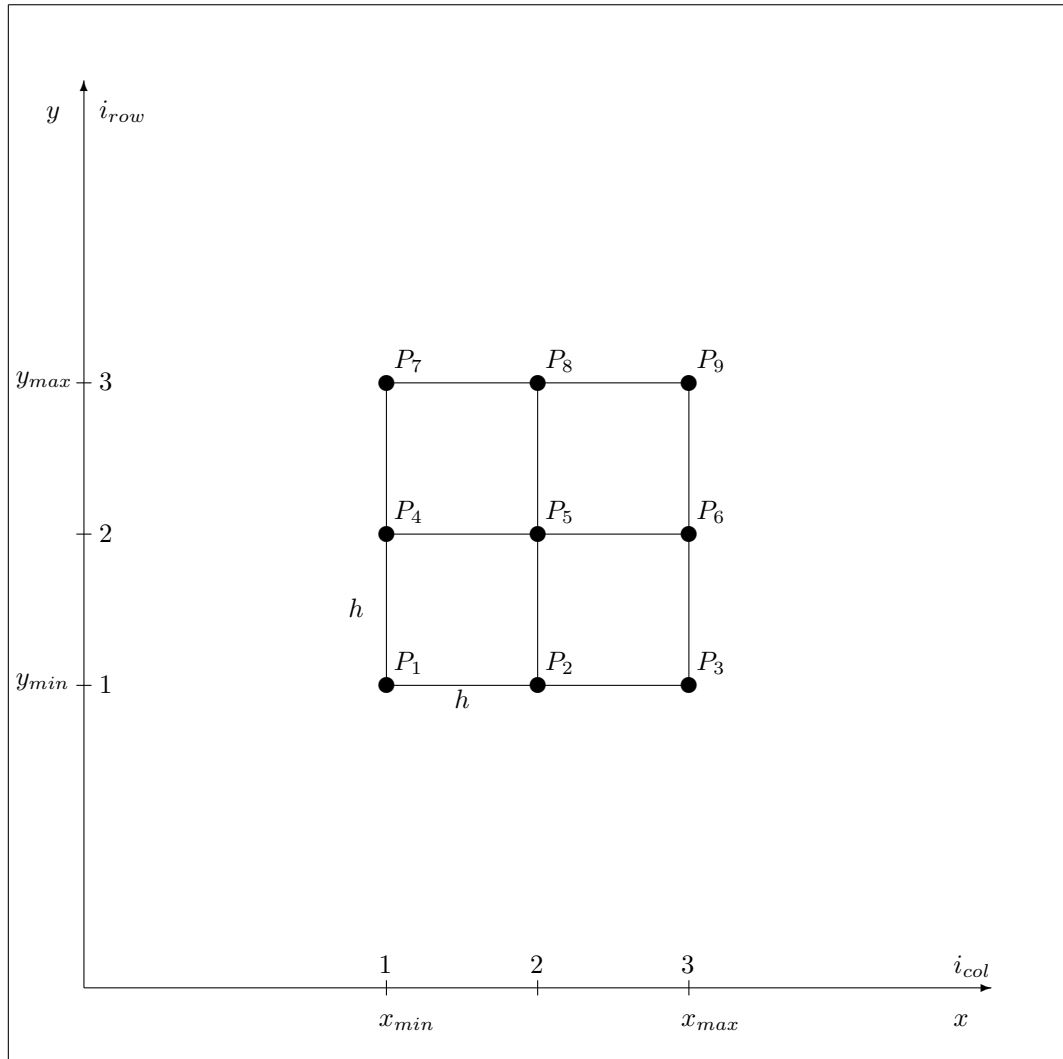


Figure 1: Mesh XY type D



## 141 7 Example of D-type mesh in ANSI C

142 Example of D- type mesh in ANSI C program. The mesh is analogous to B -  
 143 type mesh. Just  $h_x = h_y = h$ .

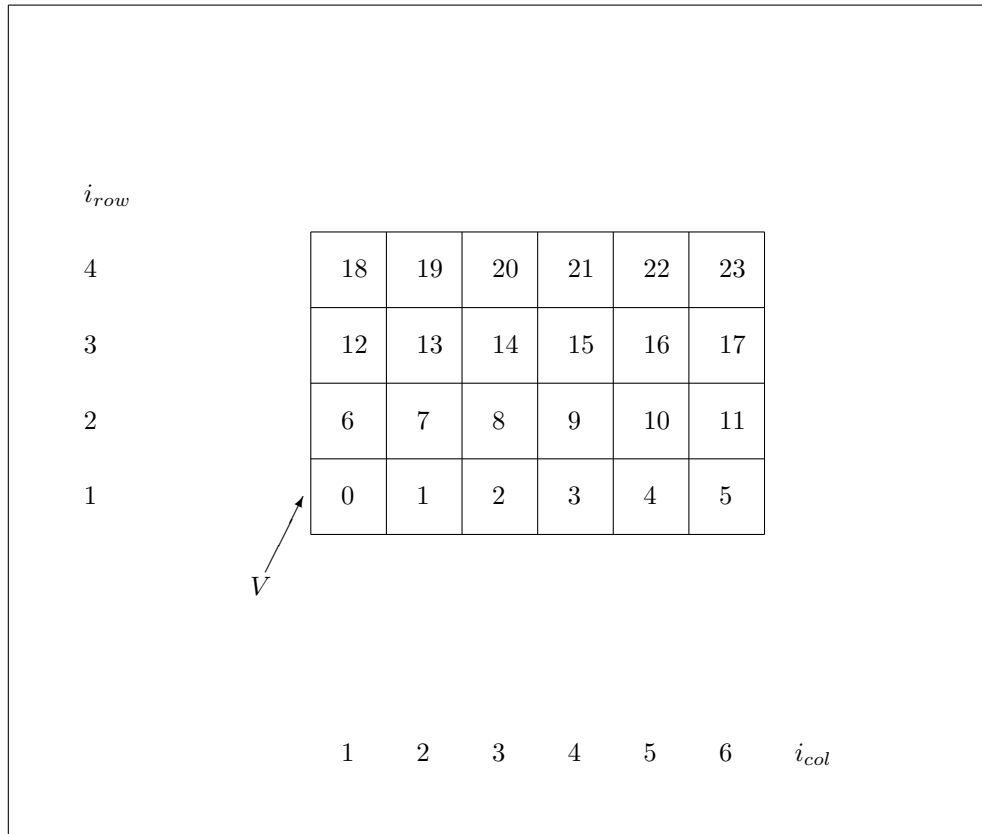


Figure 2: ANSI C - mesh XY type D

- 144 •  $V \equiv \text{double* ptr\_V}$
- 145 • `unsigned int size_row == 4`
- 146 • `unsigned int size_col == 6`
- 147 • `unsigned int i_row == 1, 2, ..., 4`
- 148 • `unsigned int i_col == 1, 2, ..., 6`
- 149 • `double h == 1.0 [mm]`

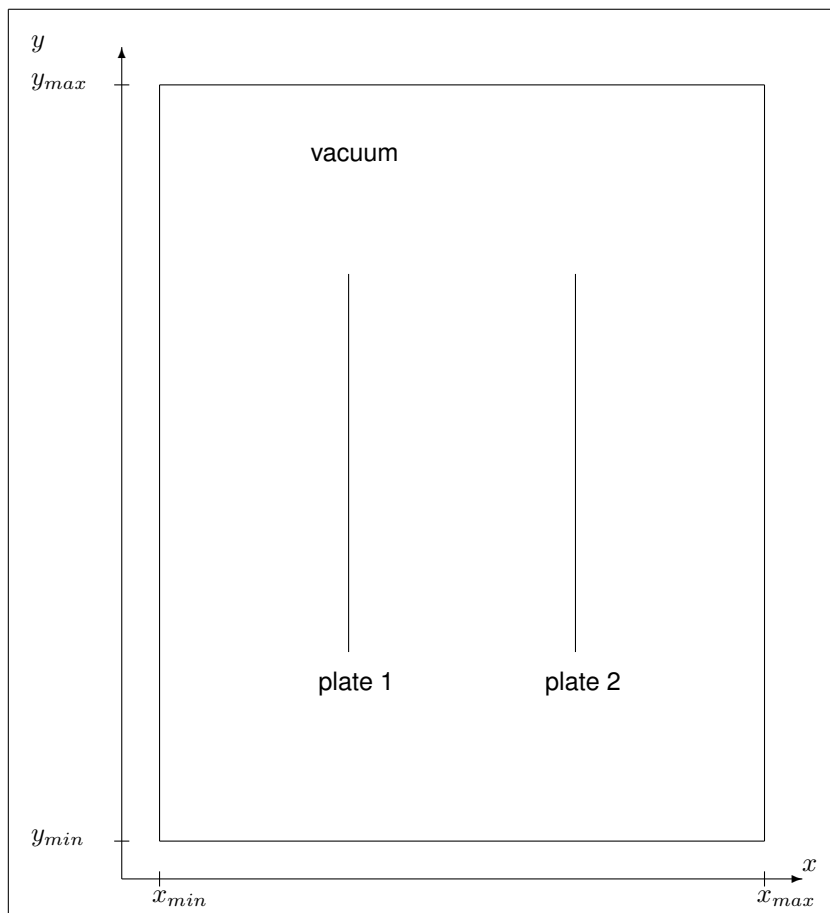


Figure 3: Example of 2D XY electrostatic problem - 2 parallel plates in vacuum

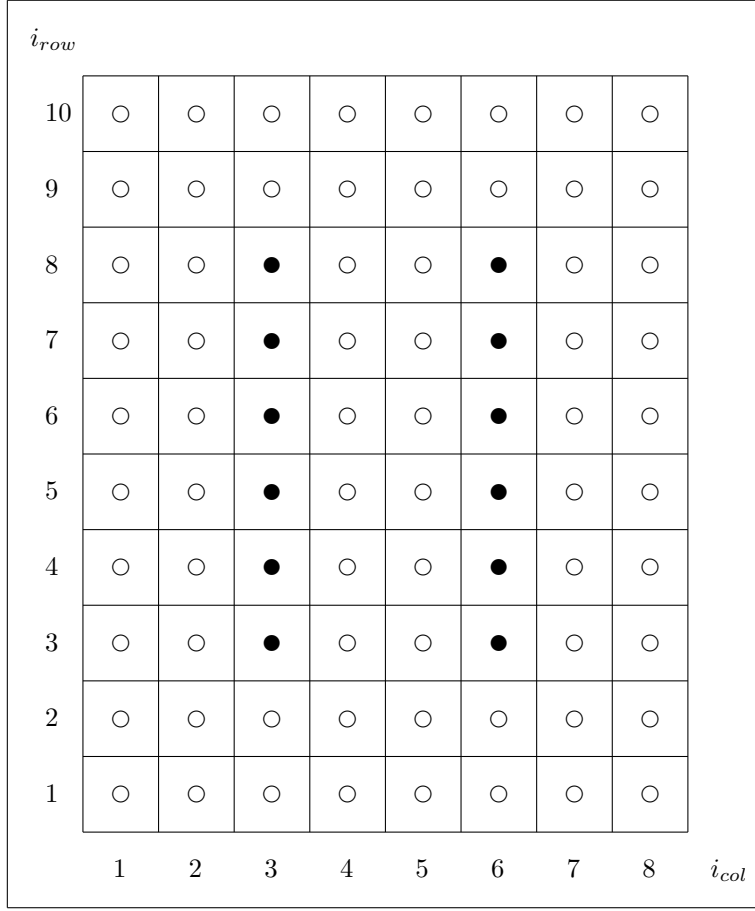


Figure 4: Nodes in sample mesh XY type D

150  $h_x = h_y = h$   
 151 gradient  $V$  outside a mesh does not exist

$i_{row}$									
10	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	0	0	1	0	0	2	0	0	
7	0	0	1	0	0	2	0	0	
6	0	0	1	0	0	2	0	0	
5	0	0	1	0	0	2	0	0	
4	0	0	1	0	0	2	0	0	
3	0	0	1	0	0	2	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	$i_{col}$

Figure 5: Boundaries in sample mesh XY type D

$i_{row}$									
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
8	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
7	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
6	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
5	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
4	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
3	0.0	0.0	+1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	$i_{col}$

Figure 6: Values of electrostatic potential  $V_{(x,y)}$  in sample mesh XY type D

$i_{row}$									
10	72	73	74	75	76	77	78	79	
9	64	65	66	67	68	69	70	71	
8	56	57	58	59	60	61	62	63	
7	48	49	50	51	52	53	54	55	
6	40	41	42	43	44	45	46	47	
5	32	33	34	35	36	37	38	39	
4	24	25	26	27	28	29	30	31	
3	16	17	18	19	20	21	22	23	
2	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	0	1	2	3	4	5	6	7	
	1	2	3	4	5	6	7	8	$i_{col}$

Figure 7: Indices in sample mesh XY type D (ANSI C)

152      Size of mesh (number of rows and columns) is:

153    `size_row == 10`

154    `size_col == 8`

155      We can have access to each node if we know its row and column: We can  
156    determine its index (let's name it `icp` (index if „central” point)).

157    `icp = (i_row - 1) * size_col + i_col - 1`

158      where

159    `i_row == 1, 2, .., size_row`

160    `i_col == 1, 2, .., size_col`

161      For example, if we want to set voltage of node with index `icp`, to 1.0 Volt,  
162    we can do it using pointer notation:

```
163 double* ptr_V is pointer to voltage mesh
164 *(ptr_V + icp) = +1.0;
```

## 165 **References**

- 166 [1] W. community, "Prawo\_gaussa\_(elektryczność)," 2024.
- 167 [2] J. R. Nagel, "Solving the generalized poisson equation using the finite -  
168 difference method (fdm).," 2012.
- 169 [3] W. community, "Prawo\_gaussa\_(elektryczność)," 2024.
- 170 [4] W. community, "Dywergencja," 2024.
- 171 [5] P. Grivet, *Electron Optics, Second (revised) English edition*. Pergamon  
172 Press Ltd., 1972.
- 173 [6] A. Septier(ed.), *Focusing of Charged Paticles*. New York and London,  
174 Academic Press, 1967.
- 175 [7] A. Septier(ed.), *Applied Charged Paticle Optics, part A*. New York and  
176 London, Academic Press, 1980.
- 177 [8] D. W. O. Heddle, *Electrostatic Lens Systems. Second Edition*. Institute of  
178 Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2000.
- 179 [9] B. Paszkowski, *Optyka Elektronowa, wydanie II, poprawione i uzu-  
180 pełnione*. Państwowe Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa,  
181 1965.
- 182 [10] B. Paszkowski, *Electron Optics [by] B.Paszkowski. Translated from the  
183 Polish by George Lepa. English translation edited by R. C. G. Leckey*. Lon-  
184 don, Iliffe; New York, American Elsevier Publishing Company Inc., 1968.