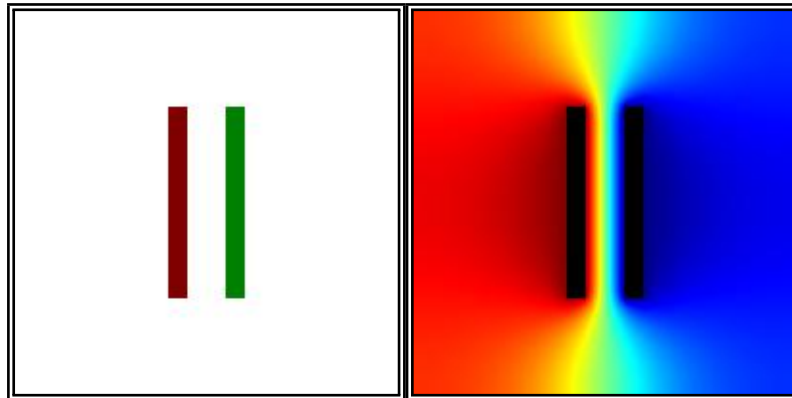


1 **Liebmann technical documentation**
2 **Liebmann - dokumentacja techniczna**



4 Wyznaczanie rozkładu pola elektrostatycznego w próżni
5 metodą relaksacyjną Liebmann.
6 (wersja polska)

7 Determination of electrostatic field distribution in vacuum by
8 Liebmann relaxation method
9 (Polish version)

10 autor: Marcin Kulbaka
11 email: mkulbaka@onet.pl
12 strona domowa projektu: <http://marcinkulbaka.prv.pl/Liebmann/index.html>

13 licencja: GNU General Public License v3.0+

14 **wersja 6**
15 **2024.12.13**

16 University of Maria Skłodowska - Curie in Lublin, Poland

17 Spis treści

| | | |
|----|---|-----------|
| 18 | 1 Dokumentacja techniczna programu Liebmann - dokumenty tej serii | 2 |
| 19 | 2 Wersje tego dokumentu | 2 |
| 20 | 3 Spis symboli | 2 |
| 21 | 4 Po co tyle wysiłku? | 3 |
| 22 | 4.1 O tym dokumencie | 3 |
| 23 | 4.2 Podziękowania | 3 |
| 24 | 4.3 Problem poznany w szkole średniej | 4 |
| 25 | 4.4 Przykład - lampa oscyloskopowa | 4 |
| 26 | 4.5 Przykład szkolny - płytki odchylające | 6 |
| 27 | 5 Równanie Laplace'a | 8 |
| 28 | 5.1 Po co równanie Laplace'a? | 8 |
| 29 | 5.2 Prawo Gaussa w ujęciu całkowym | 8 |
| 30 | 5.3 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa | 9 |
| 31 | 5.4 Dywergencja | 9 |
| 32 | 5.5 Związki pomiędzy indukcją pola elektrycznego na natężeniem 33 pola elektrycznego | 9 |
| 34 | 5.6 Gradient | 9 |
| 35 | 5.7 Prawo Gaussa w ujęciu różniczkowym | 10 |
| 36 | 5.8 Równanie Poissona | 10 |
| 37 | 5.9 Równanie Laplace'a | 11 |
| 38 | 6 Idea siatki numerycznej | 12 |
| 39 | 7 Siatka numeryczna XY typu D | 14 |
| 40 | 8 Metoda relaksacji | 15 |
| 41 | 9 Nazewnictwo w oprogramowaniu Liebmann | 20 |

42 1 Dokumentacja techniczna programu Liebmann - do- 43 kumety tej serii

- 44 1. Wyznaczanie rozkładu pola elektrostatycznego w próżni metodą relaksa-
45 cyjną Liebmann. (Polish version / wersja polska)
- 46 2. Determination of electrostatic field distribution by using Liebmann relaxa-
47 tion method. (English version / wersja angielska)
- 48 3. Graphics. Mapping voltages to colours (colormaps)
- 49 4. Laplace equation 2D (XY). (Cartesian coordinates). Relaxation scheme
50 explained (5 - point star)
- 51 5. Laplace equation 2D (ZR). (Cylindrical coordinates). Relaxation scheme
52 explained (5 - point star)
- 53 6. Liebmann source code. (ANSI C programming language)

54 2 Wersje tego dokumentu

- 55 1. version 1 - 2023.11.03
- 56 2. version 2 - 2024.01.26
- 57 3. version 3 - 2024.05.24
- 58 4. version 4 - 2024.10.15
- 59 5. version 5 - 2024.12.12
- 60 6. version 6 - 2024.12.13

61 3 Spis symboli

- 62 • P_i - i -ty węzeł siatki
- 63 • V_i - wartość potencjału elektrycznego w węźle P_i . Jednostka: [V]
- 64 • h - krok siatki (np. h_x - krok siatki w kierunku x . Jednostka: [mm])
- 65 • $g_{i+/-}$ - gradient potencjału w kierunku i (np. $g_{1x-} = \frac{V_1 - V_{1x-}}{h_x}$. Jednostka:
66 $\left[\frac{V}{mm}\right]$
- 67 • i_{row} - indeks wiersza w siatce. Wartości: $i_{row} = 1, 2, \dots, size_row$
- 68 • i_{col} - index kolumny w siatce. Wartości: $i_{col} = 1, 2, \dots, size_col$

69 4 Po co tyle wysiłku?

70 4.1 O tym dokumencie

71 Spróbuję opisać moją próbę rozwiązania równania Laplace'a metodą relaksa-
72 cyjną Liebmanna. W wyprowadzaniach korzystałem z książki Pierre-a Grivet-a
73 „Electron Optics”, 2nd. edition, Pergamon Press 1972 [1]. Jest kilka wydań tej
74 książki (1965, 1972). Wydanie drugie (1972) zawiera opis metody relaksacji,
75 która może zostać zastosowana na komputerach cyfrowych (strona 38).

76 Do wyprowadzenia równania Laplace'a zastosowałem publikację James R.
77 Nagel - [2]. <https://my.ece.utah.edu/~ece6340/LECTURES/Feb1/> (visited
78 2023-03-01).

79
80 Ponadto istnieje cały zbiór literatury poświęconej optyce elektronowej i opty-
81 ce cząstek naładowanych (ang. electron optics, charged particle optics) np. Al-
82 bert Septier: „Focusing of Charged Particles” [3] lub „Applied Charged Particle
83 Optics” (part A). [4]. Nie korzystałem z tego za bardzo. W sumie na razie raczej
84 ograniczam się do podstaw.

85 Natrafiłem też na publikację D W O Heddle: „Electrostatic Lens Systems”
86 [5]. Zawierała ona opis programu LENSYS. Nie korzystałem z tego oprogra-
87 mowania, ale przejrzenie książki przeniosło mnie trochę w świat komputerów
88 starszej ery i chyba trochę pomogło z projektowaniem rysowania na ekranie ob-
89 razów piksel po pikslu.

90 Inną publikacją ze starszych czasów jest książka Bohdana Paszkowskiego
91 „Optyka Elektronowa” [6] (Istnieje też wydanie angielskie: [7]). Jest tam m.in
92 krótkie naszkicowanie rozwiązywanie równania Laplace'a metodą relaksacyjną
93 na kartce papieru (współrzędne 2D X-Y).

95 4.2 Podziękowania

96 Chciałbym podziękować wielu osobom, które pomogły mi w tym przedsięwzię-
97 ciu.

98 Szczególnie prof. dr hab. Mieczysławowi Jałochowskiemu (promotorowi mo-
99 jej pracy magisterskiej), który pozwolił korzystać mi z komercyjnego oprogra-
100 mowania SIMION i MATLAB podczas pisania pracy magisterskiej z układów
101 elektronooptycznych na Uniwersytecie Marii Curie - Skłodowskiej w Lublinie w
102 2008 roku.

103 Chciałbym także podziękować prof. Marcinowi Turkowi za owocne pora-
104 dy na temat metod numerycznych.

105 Co więcej, kolega Bartosz w 2012 r. wyjaśnił mi ogólne problemy z wydaj-
106 nością oprogramowania. On także wniósł znaczący wkład do idei oprogramo-
107 wania Liebmann (szczególnie użycie języka C).

108 **4.3 Problem poznany w szkole średniej**

109 W szkole średniej omawia się czasem odchyłanie torów lotu cząstek nałado-
110 wanych w polu elektrostatycznym i magnetycznym.

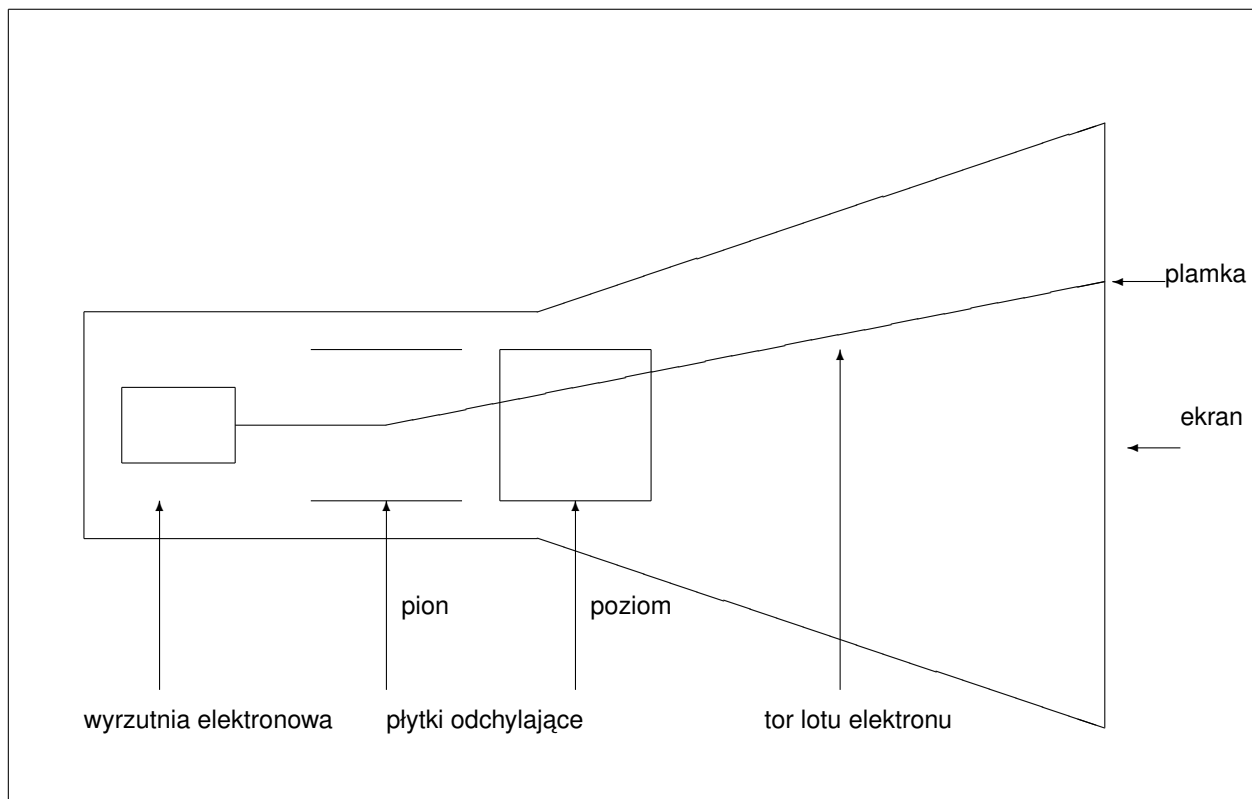
111 Znajduje to zastosowanie w różnych urządzeniach. Dawniej typowym przy-
112 kładem był kineskop w telewizorze, bądź monitorze komputerowym. Innym waż-
113 nym zastosowaniem była lampa oscyloskopowa. W urządzeniach tych umiejęt-
114 ne sterowanie torem lotu elektronów pozwalało „rysować” na ekranie żądane
115 obrazy i wykresy.

116 Obecnie ruch cząstek naładowanych jest nadal wykorzystywany. Telewizory
117 i oscyloskopy co prawda przeszły ewolucję, jednak niektóre inne typy przyrzą-
118 dów są nadal wykorzystywane w nauce i technice. Spektrometry masowe, mi-
119 kroskopy elektronowe i akceleratory pozwalają na prowadzenie unikalnych ba-
120 dań. W technice stosuje się m.in. spawarki elektronowe, implanatory jonów. Co
121 ciekawe, także przemysł półprzewodnikowy korzysta z aparatury elektronoop-
122 tycznej. Aby wytwarzać maski wykorzystywane w produkcji układów scalonych
123 konieczne jest stosowanie litografii elektronowej. Aparatura ogniskująca cienkie
124 wiązki jonowe pozwala na wytwarzanie unikalnych struktur materii. Mnogość
125 rozwiązań jest imponująca i w sumie wykracza poza mój zakres kompetencji.

126 Co do mnie, postanowiłem zrobić i opisać symulacje podstawowych urzą-
127 dzeń elektronowych.

128 Wracając do lampy oscyloskopowej. Zrobiłem prosty szkic.

129 **4.4 Przykład - lampa oscyloskopowa**



Rysunek 1: Lampa oscyloskopowa (schemat ideowy)

130 Pole elektrostatyczne może być wykorzystane do przyspieszania cząstek
131 naładowanych lub zmiany torów ich lotu. W lampie oscyloskopowej te dwa za-
132 stosowania mogą zostać zrealizowane dzięki polu elektrostatycznemu.

133 W lampie oscyloskopowej źródłem elektronów jest wyrzutnia elektronowa.
134 Wytwarza ona wiązkę elektronową. W oscyloskopowej wyrzutni elektronowej
135 elektrony mogą być emitowane przez katodę (termoemisja elektronowa). Na-
136 stępnie elektrony są ogniskowane przez elektrodę zwaną cylindrem Wehnelta.
137 Potem elektrony są porzyspieszane w polu elektrycznym wytwarzanym przez
138 katodę. Wyrzutnia elektronowa na ogół ma symetrię walcową. Pole elektrosta-
139 tyczne o symetrii walcowej pozwala na odniskowanie wiązki cząstek naładowa-
140 nych.

141 ===== SZKIC - RYSUNEK WYRZUTNI ELEKTRONOWEJ =====

142 Drugim zastosowaniem pola elektrostatycznego w oscyloskopie katodowym
143 jest odchyłanie wiązki. Służą do tego płytki odchylające. Pomiędzy płytkami
144 odchylającymi znajduje się pole elektrostatyczne mogące mieć rozkład zbliżony
145 do jednorodnego. Uważa się, że jeżeli płytki są umieszczone blisko siebie i
146 odległość między nimi jest znacznie mniejsza od długości tych płytek, to pole
147 elektrostatyczne pomiędzy płytkami można uznać za jednorodne.

148 ===== SZKIC - RYSUNEK PŁYTEK ODCHYLAJĄCYCH =====

149 Pojawiają się jednak pewne pytania. Jeżeli konstruuje się urządzenie wy-
150 korzystujące z ruchu cząstek naładowanych w polach elektrostatycznych, to zna-
151 jomość dokładnego rozkładu pola elektrostatycznego pozwoliłaby na uzyskanie
152 np. lepszego działania telewizora i szeregu innych urządzeń o ważnym znac-
153 niu dla różnych obszarów życia.

154 4.5 Przykład szkolny - płytki odchylające

155 Naszkicuję prostszy problem - odchyłanie toru elektronu pomiędzy płytkami w
156 lampie oscyloskopowej. Problem ten jest omawiany np. w repetytorium matu-
157 ralnym z fizyki Blinowskiego i Tryskiego()

158 W próżni znajduje się cząstka posiadająca masę m oraz ładunek
159 elektryczny q .

160 Cząstka ta jest rozpędzana do prędkości \vec{v} (prędkość jest wektorem i ma w
161 ogólności 3 składowe, w układzie kartezjańskim v_x, v_y, v_z).

162 Cząstka wlatuje pomiędzy dwie naładowane płaskorównoległe płytki. Po-
163 między płytkami znajduje się jednorodne pole elektrostatyczne. Pole elektro-
164 statyczne działa na cząstkę siłą prostopadłą do początkowego kierunku wlotu.
165 Powoduje to nadanie cząstce dodatkowej prędkości w kierunku poprzecznym:
166 v_y .

167 Ta prędkość „poprzeczna” v_y powoduje, że tor lotu zostaje zakrzywiany.
168 Jeżeli nasza cząstka wyleci z obszaru pola, to będzie poruszała się po linii
169 prostej, jednak tor będzie zakrzywiony o pewien kąt. W końcu cząstka uderzy
170 w ekran pokryty luminoforem i spowoduje emisję światła (wywoła świecenie
171 punktu na ekranie).

172 Można powiedzieć, że im silniejsze pole odchylające i im dłużej działa na
173 cząstkę, tym odchylenie jest silniejsze.

174 W szkole średniej uczy się, że jeżeli płytki odchylające są blisko siebie (ich
175 długość jest znacznie większa od odległości pomiędzy nimi), to pole elektrosta-
176 tyczne można uznać za jednorodne.

177 Poza płytkami pole elektrostatyczne zanika. W obszarze blisko krawędzi
178 płytek pole ulega osłabieniu. Ważne są informacje ilościowe - jaki jest prawdzi-
179 wy przebieg natężenia pola elektrostatycznego w okolicach krańców płytek?

180 Odpowiedź nie jest trywialna.

181 Na studiach specjalistycznych można dowiedzieć się, że rozkład pola elek-
182 trostatycznego można wyznaczyć dokładniej przy pomocy różnych bardziej za-
183 awansowanych metod obliczeniowych. Generalnie wchodzimy na obszar ma-
184 tematyki wyższej i nie są to rzeczy proste.

185 Rozkład pola elektrostatycznego można wyznaczyć na różne sposoby.

186 • Niektóre rodzaje pól elektrostatycznych można wyznaczyć ściśle przy po-
187 mocy zaawansowanych metod matematycznych. W starszych książkach
188 o optyce elektronowej znajdują się czasami rozwiązania pewnych rodza-
189 jów pola elektrostatycznego. Problem był też studionany przez matema-
190 tyków. Matematycy również pisali książki o rozwiązywaniu takich zagad-
191 nień.

192 • Czasami rozkłady pola elektrostatycznego można wyznaczyć z pomo-
193 cą wzorów przybliżonych. W literaturze poświęcone optyce elektronowej
194 istnieją wzory pozwalające obliczyć właściwości soczewek w oparciu o
195 „uproszczone” pola elektrostatyczne. Można założyć np, że pole zmienia
196 się liniowo i skomplikowaną funkcję zastępujemy kilkoma liniami łamanymi.

197 • Istnieją metody „analogowe”, wykorzystywane także raczej w przeszłości.
198 Metoda wanny elektrolitycznej, metoda siatki oporowej, metoda membra-
199 ny gumowej. Wykorzystują one analogię rozkładu pola elektrostatyczne-
200 go w próżni do rozkładu np. potencjału pola elektrycznego w wannie
201 elektrolitycznej. Do takiej specjalnej wanny można zanurzyć metalowe
202 elektrody, ustalić ich napięcia i przy pomocy sondy badać potencjał elek-
203 tryczny w obszarze pomiędzy elektrodami, punkt po punkcie.

204 • Istnieją też „ogólne” metody numeryczne, pozwalające na wyznaczanie
205 nawet mniej typowych rodzajów pól elektrostatycznych. Metody te są
206 obecnie chętnie stosowane z powodu dużej dostępności szybkich kom-
207 puterów cyfrowych. Metody te korzystają z wielu zdobyczy matematyki.

208 W tym artykule będę próbował opisać ostatnią metodę - wyznaczanie roz-
209 kładu potencjału pola elektrostatycznego metodą relaksacyjną. Spotkałem się
210 z nazwą „metoda relaksacyjna Liebmann’a”, nazwana tak od nazwiska osoby,
211 która po raz pierwszy zastosowała metodę relaksacyjną w optyce elektrono-
212 wej.

213 5 Równanie Laplace'a

214 5.1 Po co równanie Laplace'a?

215 W moim przypadku mam wyznaczyć rozkład potencjału pola elektrostatyczne-
216 go w próżni. Modelowana przestrzeń składa się z metalowych elektrod i próżni.
217 Nie ma dielektryków.

218 Elektrody metalowe mogą mieć dowolny kształt, więc stosowanie prostych
219 symetrii nie zawsze jest możliwe.

220 Konieczne jest zastosowanie bardziej ogólnego podejścia.

221 Aby wyznaczyć rozkład natężenia pola elektrostatycznego w takim przy-
222 padku należy rozwiązać równanie różniczkowe Laplace'a.

223 Poniżej podam jego wyprowadzenie.

224 Elektrodynamika klasyczna wykorzystuje równania Maxwella. Prawa te moż-
225 na przedstawić w dwóch postaciach.

226 • postać różniczkowa

227 • postać całkowa

228 Do opisu pola elektrostatycznego wykorzystamy prawo Gaussa. Do prze-
229 kształcenia postaci całkowej w różniczkową posłuży prawo Ostrogradskiego -
230 Gaussa.

231 5.2 Prawo Gaussa w ujęciu całkowym

232 Uwaga. Tutaj V oznacza objętość.

233 Treść prawa Gaussa w ujęciu całkowym.

234 Strumień natężenia pola elektrycznego \vec{D} przenikający przez zamkniętą
235 powierzchnię S , ograniczającą obszar o objętości V jest równy całkowitemu
236 ładunkowi elektrycznemu Q zawartemu w tej objętości.

$$\Phi_D = \oint_s \vec{D}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{S} = Q \quad (5.1)$$

237 Ładunek elektryczny w objętość V jest opisany zależnością:

$$\int_V \rho_{(\vec{r})} dV = Q \quad (5.2)$$

238 Tzn. całka z gęstości ładunku elektrycznego po objętości V jest równa cał-
239 kowitemu ładunkowi elektrycznemu znajdującemu się w tej objętości V .

240 Opracowano na podstawie Wikipedii [8] (dostęp 2024.07.19).

241 Pomiędzy indukcją pola elektrycznego a indukcją pola elektrycznego zachod-
242 zi związek:

$$\vec{D}_{(\vec{r})} = \epsilon_{(\vec{r})} \vec{E} \quad (5.3)$$

243 Dla ośrodka izotropowego zachodzi związek:

$$\epsilon_{(\vec{r})} = \epsilon_0 \epsilon_{r(\vec{r})} \quad (5.4)$$

244 Opracowano na podstawie: Nagel 2012 [2]

245 5.3 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa

246 Twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa

247 Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa umożliwia zamianę całki powierzch-
248 niowej na objętościową (potrójną) i na odwrót. Twierdzenie Ostrogradskiego -
249 Gaussa ma postać.

$$\oint_S \vec{D}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{S} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} \right) dV \quad (5.5)$$

250 5.4 Dywergencja

251 Można to zapisać przy pomocy operatora dywergencji:

$$\text{div} \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} \quad (5.6)$$

252 Opracowano na podstawie Wikipedii: [9] oraz [10].

253 5.5 Związki pomiędzy indukcją pola elektrycznego na natężeniem 254 pola elektrycznego

$$\vec{D}_{(\vec{r})} = \epsilon_{(\vec{r})} \vec{E}_{(\vec{r})} \quad (5.7)$$

$$\epsilon_{(\vec{r})} = \epsilon_0 \epsilon_{r(\vec{r})} \quad (5.8)$$

255 5.6 Gradient

256 Natężenie pola elektrostatycznego można przedstawić jako gradient potencjału
257 pola elektrostatycznego (tutaj V oznacza potencjał pola elektrostatycznego):

$$\vec{E}_{(\vec{r})} = -\nabla V_{(\vec{r})} \quad (5.9)$$

258 5.7 Prawo Gaussa w ujęciu różniczkowym

259 Przypomnijmy twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa:

$$\oint_S \vec{D}_{(\vec{r})} \cdot d\vec{S} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} \right) dV \quad (5.10)$$

260 Obie całki są równe całkowitemu ładunkowi (Q) wewnątrz opisywanej obję-
261 tości (V), jak zostało opisane poprzednio:

$$\int_V \rho_{(\vec{r})} dV = Q \quad (5.11)$$

262 Zatem można napisać, że

$$\int_V \left(\nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} \right) dV = \int_V \rho_{(\vec{r})} dV \quad (5.12)$$

263 Porównajmy te całki po objętości. Skoro te całki są równe, to wyrażenia
264 podcałkowe również są sobie równe. Otrzymaliśmy związek:

$$\nabla \cdot \vec{D}_{(\vec{r})} = \rho_{(\vec{r})} \quad (5.13)$$

265 5.8 Równanie Poissona

266 Aby otrzymać równanie Poissona i Laplace'a musimy jeszcze przedstawić wek-
267 tor indukcji pola elektrostatycznego $\vec{D}_{(\vec{r})}$ przez gradient potencjału elektrosta-
268 tycznego (V).

$$\vec{E}_{(\vec{r})} = -\nabla V_{(\vec{r})} \quad (5.14)$$

269 Po wstawieniu otrzymujemy:

$$\nabla \cdot \left(\epsilon_{r(\vec{r})} \nabla V_{(\vec{r})} \right) = -\frac{\rho_{(\vec{r})}}{\epsilon_0} \quad (5.15)$$

270 Dla ośrodka izotropowego dielektrycznie zachodzi zależność.

$$\epsilon_{(\vec{r})} = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (5.16)$$

271 Otrzymujemy równanie Poissona w najbardziej typowej postaci:

$$\nabla^2 V_{(\vec{r})} = -\frac{\rho_{(\vec{r})}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (5.17)$$

272 Opracowano na podstawie: Nagel 2012 [2]

273 5.9 Równanie Laplace'a

274 Równanie Laplace'a jest szczególnym przypadkiem równania Poissona. Jest
275 słuszne, kiedy w danym punkcie przestrzeni nie ma ładunku elektrycznego,
276 bądź można go zaniedbać. Przykładem może być próżnia i metalowe elektrody
277 wytwarzające pole. Zostanie to potem pokazane w przykładach praktycznych.

278 Jeżeli w równaniu Poissona zaniedbamy gęstość ładunku elektrycznego
279 ($\rho(\vec{r}) = 0$), wówczas otrzymujemy równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0 \quad (5.18)$$

280 Równanie Laplace'a w kartezjańskim układzie współrzędnych 2D (X-Y) ma
281 postać:

$$\frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{(x,y)}}{\partial y^2} = 0 \quad (5.19)$$

282 Opisuje ono potencjał pola elektrostatycznego $V_{x,y}$. Takie równanie będzie-
283 my rozważali w dalszej części publikacji.

284 Równanie Laplace'a można wyrazić także w innych układach współrzed-
285 nych, ale ma ono wtedy inną postać.

286 Równanie Laplace'a w kartezjańskim układzie współrzędnych 3D (X-Y-Z) ma
287 postać:

$$\frac{\partial^2 V_{(x,y,z)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{(x,y,z)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{(x,y,z)}}{\partial z^2} = 0 \quad (5.20)$$

288 Z kolei równanie Laplace'a dla współrzędnych walcowych o symetrii obro-
289 towej 2D (Z-R) (np. elektrody cylindryczne) ma postać:

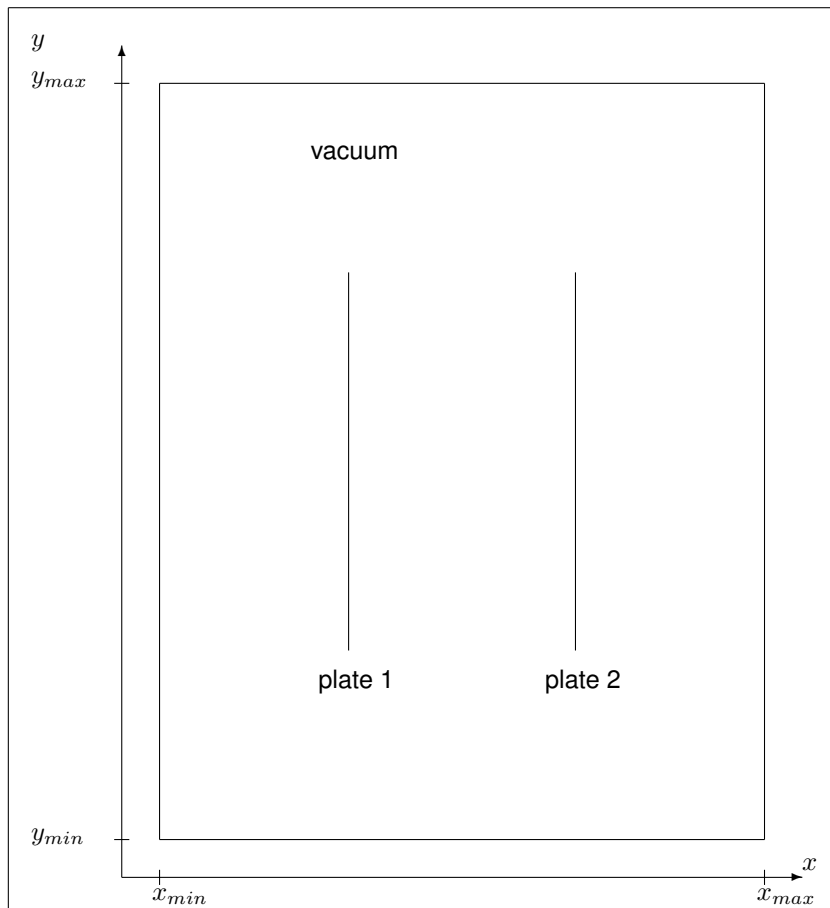
$$\frac{\partial^2 V_{(z,r)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{(z,r)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_{(z,r)}}{\partial r^2} = 0 \quad (5.21)$$

290 Zagadnienie to będzie być może omawiane w innej publikacji.

6 Idea siatki numerycznej

Wyobraźmy sobie, że chcemy wyznaczyć pole elektrostatyczne pomiędzy dwiema płytkami metalowymi w próżni.

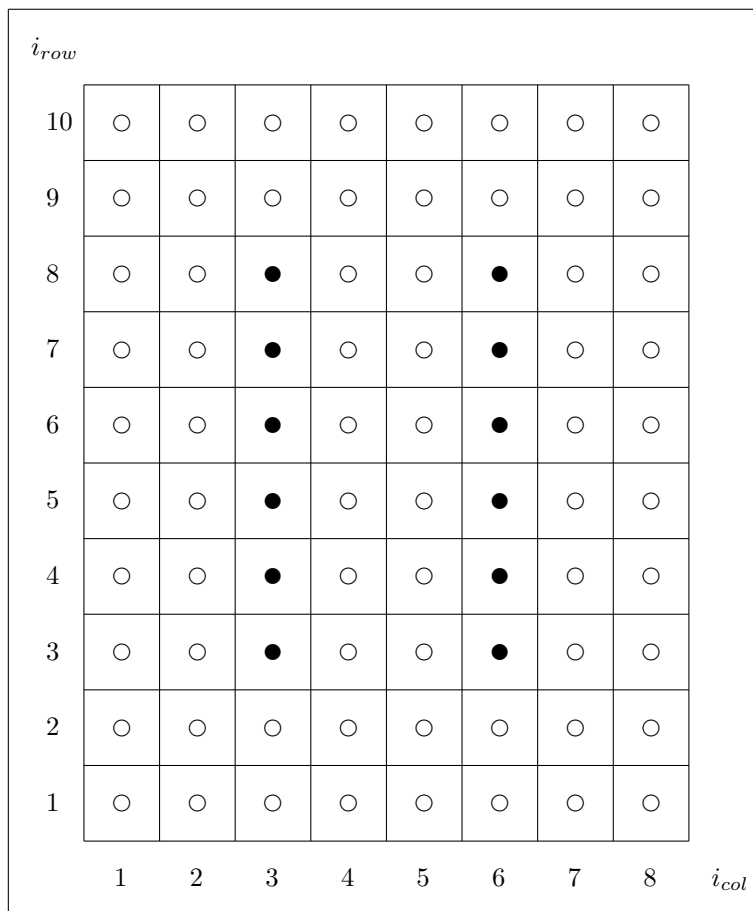
Mamy problem elektrostatyczny do rozwiązania - 2 płytki płaskorównoległe w próżni. Potencjały płytek = $+1.0$ [V] i -1.0 [V].



Rysunek 2: Problem elektrostatyczny - 2 płytki płaskorównoległe w próżni

Rozważamy przestrzeń 2D (współrzędne X-Y). Modelowany obszar ma współrzędne x i y w zakresach $[x_{min}..x_{max}]$ oraz $[y_{min}..y_{max}]$.

Idea siatki numerycznej polega na przybliżeniu przestrzeni ciągłej (która zawiera teoretycznie nieskończenie wiele punktów) jak gdyby przybliżoną tablicą 2D przechowującą wartości potencjałów w swoich komórkach. U mnie siatka jest prostokątna, przechowuje skończoną liczbę punktów (10 rzędów i 8 kolumn).



Rysunek 3: Rozmieszczenie elektrod dla problemu dwóch płytek w próżni na siatce numerycznej XY typu D

- 303 Kropki wypełnione to elektrody, okręgi niewypełnione to próżnia.
 304 Jeżeli dany punkt siatki należy do metalowej elektrody, to:
- 305 • warunek ograniczający - punkt może należeć do elektrody o danym nu-
 306 merze
 - 307 • potencjał elektrostatyczny takiego punktu jest zadany i nie ulega zmianie
 308 podczas obliczeń
- 309 Jeżeli dany punkt siatki należy do próżni, to:
- 310 • warunek ograniczający - punkt należy do próżni (próżnia jest sygnalizo-
 311 wana numerem zero).
 - 312 • potencjał elektrostatyczny takiego punktu musi zostać wyznaczony w
 313 oparciu o rozkład potencjałów elektrod.
- 314 Do przechowywania tych danych trzeba dwóch siatek: V i Bnd.

315 7 Siatka numeryczna XY typu D

316 Ustawiamy warunki ograniczające dla tego problemu.

317 Na siatce zawierającej warunki brzegowe (ograniczające) wpisujemy nume-
318 ry elektrod. Zera to próżnia. Są 2 płytki, więc te elektrody ponumerujemy: 1 i
319 2:

320 To jest pierwsza siatka typu Bnd (ang. boundaries).

| | | | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| i_{row} | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | i_{col} |

Rysunek 4: Warunki oraniczające dla problemu dwóch płytek w próżni na siatce przechowującej warunki brzegowe (ptr_Bnd)

321 Gdzie poszczególne rodzaje węzłów oznaczają:

322 0 - próżnia

323 1 - elektroda rodzaju 1

324 2 - elektroda rodzaju 2

325 Teraz ustawiamy potencjały dla poszczególnych węzłów: To jest druga siat-
326 ka V (potencjał).

| | | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|------|-----|-----|------|-----|-----|-----------|
| i_{row} | | | | | | | | | |
| 10 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 8 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 7 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 6 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 5 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 4 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 3 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | i_{col} |

Rysunek 5: Wartości początkowe potencjału pola elektrostatycznego $V_{(x,y)}$ na siatce XY typu D (ptr_V)

Punkty reprezentujące próżnię zostały ustawione na zero woltów. Generalnie powinna to być wartość pomiędzy najniższym a najwyższym potencjałem elektrod. Skoro elektrody mają $+/- 1.0V$, to próżnię ustawiono na zero.

Istnieje analogia pomiędzy rozkładem potencjału 2D (XY) a powierzchnią membrany gumowej [6]. Potencjał w próżni stara się przyjąć wartości pośrednie.

8 Metoda relaksacji

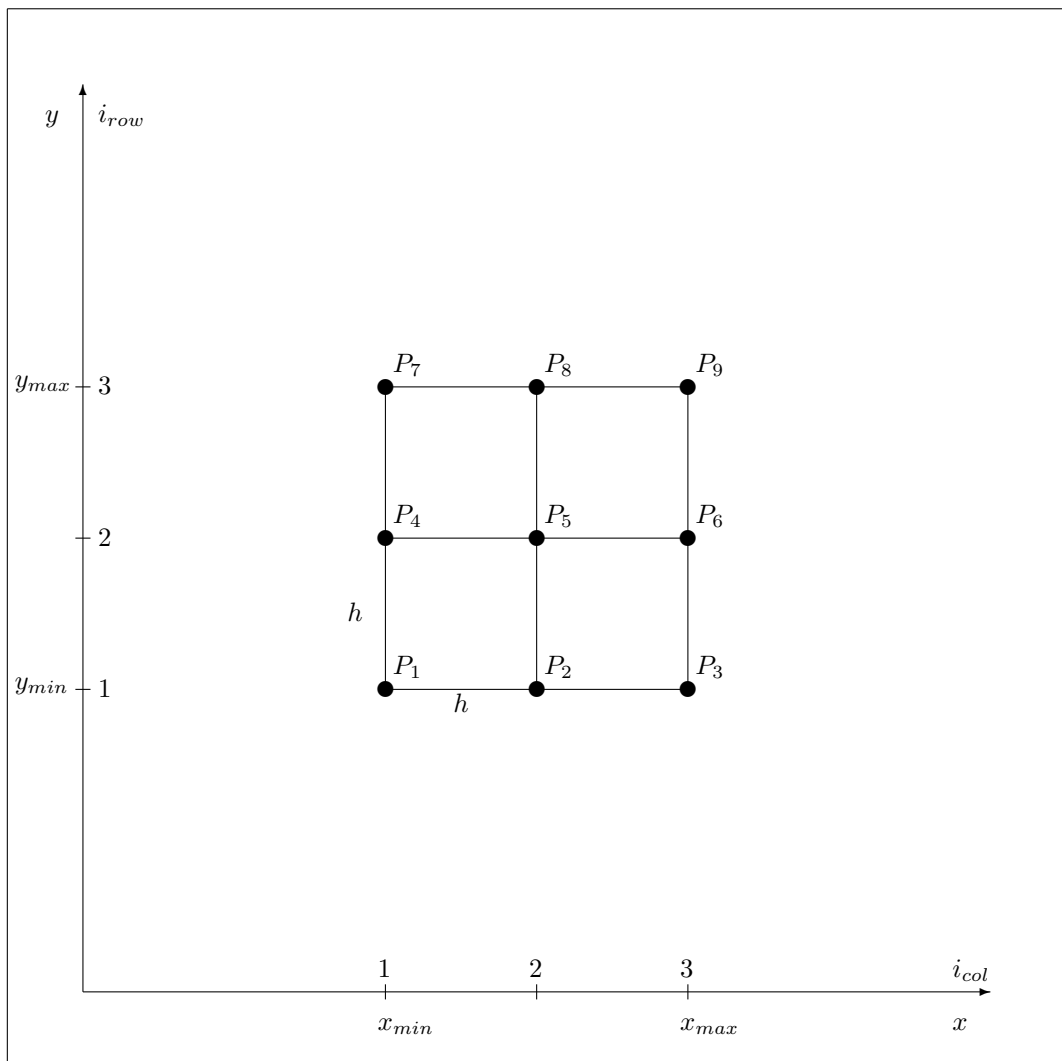
Mamy więc ustawiony problem do rozwiązania. Metoda relaksacji została naszkicowana w książkach o optyce elektronowej, np. Pierre Grivet, „Electron Optics”, 2nd edition, Pergamon Press 1938, (strona 38).

Klasyczna metoda relaksacyjna jest nazywana metodą relaksacyjną Liebman (Paszowski [6]). Polega ona na wykonywaniu na wszystkich komór-

339 kach procedury relaksacji.

340 Musimy przejrzeć wszystkie komórki siatki. Jeżeli dany punkt jest próżnią,
341 wówczas wykonujemy procedurę relaksacji i badamy, o ile zmieniła się nowa
342 wartość potencjału w stosunku do starej. Jeżeli wykonujemy procedury relak-
343 sacji na tablicy i już prawie nic się nie zmienia, wówczas przerywamy obliczenia
344 i możemy ogłosić sukces, bo udało się wyznaczyć rozkład potencjału pola elek-
345 trostatycznego.

346 Podam poniżej najmniejszą możliwą siatkę numeryczną. Nazwałem ją siat-
347 ką typu D.



Rysunek 6: Siatka XY typu D

348 Cechą siatki typu D jest identyczna odległość pomiędzy węzłami w pionie i
349 poziomie (skok siatki $h_x = h_y = h$) oraz brak gradientu pola elektrostatycznego

350 poza siatką.

351 Siatka ma 9 rodzajów węzłów:

- 352 • P_1 - węzeł w lewym dolnym rogu siatki
- 353 • P_2 - węzeł na dolnej krawędzi siatki
- 354 • P_3 - węzeł w prawym dolnym rogu siatki
- 355 • P_4 - węzeł na lewej krawędzi siatki
- 356 • P_5 - węzeł wewnątrz siatki
- 357 • P_6 - węzeł na prawej krawędzi siatki
- 358 • P_7 - węzeł w lewym górnym rogu siatki
- 359 • P_8 - węzeł na górnej krawędzi siatki
- 360 • P_9 - węzeł w prawym górnym rogu siatki

361 Teoretycznie taką siatkę 2D X-Y można narysować na papierze i wykony-
362 wać rachunki ręcznie. Tak robiono w przeszłości. Matematycy włożyli wiele wy-
363 siłku w te metody. Możliwe jest teoretycznie wykorzystanie arkusza kalkulacyj-
364 nego, jeżeli pozwala on na tworzenie algorytmów działających na takiej siatce.
365 W praktyce wykorzystuje się środowiska obliczeniowe bardziej wyspecjalizo-
366 wane w przechowywaniu tablic. Tradycyjnie mogą to być języki kompilowane
367 zoptymalizowane do obliczeń numerycznych typu Fortran, C, C++, Pascal albo
368 środowiska do obliczeń na macierzach w typie MATALB, GNU Octave, Scilab.
369 Zdecydowałem się na język ANSI C.

370 Metoda relaksacyjna jest metodą kolejnych przybliżeń. Polega ona na wy-
371 konaniu kolejnych iteracji. Podczas iteracji wykonujemy procedurę relaksacyj-
372 ną dla wszystkich punktów siatki, które reprezentują próżnię. Jeżeli dany punkt
373 siatki jest oznaczony jako należący do elektrody, to zachowuje on ustalony po-
374 tencjał.

375 Podczas wykonywania procedury relaksacji badamy, o ile zmienia się roz-
376 iwiązanie. Jeżeli kolejne refreny już prawie nic nie zmieniają, wówczas przery-
377 wany obliczenia.

378 Procedura relaksacji dla całej siatki w oprogramowaniu Liebmann wyrażona
379 w pseudokodzie ma postać:

- 380 • wykonaj procedurę relaksacji dla węzła P_1
- 381 • wykonaj w pętli procedurę relaksacji dla węzłów P_2 (dolna krawędź)
- 382 • wykonaj procedurę relaksacji dla węzła P_3
- 383 • wykonaj w pętli dla wierszy od drugiego do przedostatniego:
 - 384 – wykonaj procedurę relaksacji dla węzła P_4 (lewa krawędź)

- 385 – wykonaj w pętli dla kolumn od drugiej do przedostatniej P_5 (wnętrze
- 386 siatki)
- 387 – wykonaj procedurę relaksacji dla węzła P_6 (prawa krawędź)
- 388 • wykonaj procedurę relaksacji dla węzła P_7
- 389 • wykonaj w pętli procedurę relaksacji dla węzłów P_8 (górna krawędź)
- 390 • wykonaj procedurę relaksacji dla węzła P_9

391 W ogólności sposoby trawersowania siatki mogą być różne. Czasem nawet
392 na ukos.

393 Procedury relaksacji dla siatki XY typu D zostały wyprowadzone w mojej
394 publikacji[11]i (mam nadzieję, że prawidłowo). Są one oznaczone: xyLV_RELAX5_P1_D
395 - xyLV_RELAX5_P9_D

396 W procedurze dla węzła P_1 węzeł P_2 jest jego prawym sąsiadem, P_4 je-
397 go górnym sąsiadem. W prodedurze dla węzła P_2 węzeł P_1 jest jego lewym
398 sąsiadem , węzeł P_3 jest jego prawym sąsiadem a węzeł P_5 jest jego górnym
399 sąsiadem.

400 W skrócie procedury relaksacji dla siatki 2D XY typu D mają postać (metoda
401 5-cio punktowa):

- 402 • $V_1 = \frac{V_2+V_4}{2}$
- 403 • $V_2 = \frac{V_1+V_3+V_5}{3}$
- 404 • $V_3 = \frac{V_2+V_6}{2}$
- 405 • $V_4 = \frac{V_1+V_5+V_7}{3}$
- 406 • $V_5 = \frac{V_2+V_4+V_6+V_8}{4}$
- 407 • $V_6 = \frac{V_3+V_5+V_9}{3}$
- 408 • $V_7 = \frac{V_4+V_8}{2}$
- 409 • $V_8 = \frac{V_5+V_7+V_9}{3}$
- 410 • $V_9 = \frac{V_6+V_8}{2}$

411 Podczas trawersowania siatki badamy, o ile zmienia się nowa wartość w
412 stosunku do dotychczasowej. Po trawersowaniu całej siatki sprawdzamy, jaka
413 jest największa zmiana potencjału węzła. Jeżeli już prawie nic się nie zmienia
414 (największa zmiana potencjału węzła jest mniejsza od parametru eps, wówczas
415 możemy zakończyć obliczenia.

416 Teraz ustawiamy potencjały dla poszczególnych węzłów:

| | | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|------|-----|-----|------|-----|-----|-----------|
| i_{row} | | | | | | | | | |
| 10 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 8 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 7 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 6 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 5 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 4 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 3 | 0.0 | 0.0 | +1.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | i_{col} |

Rysunek 7: Wartości początkowe potencjału pola elektrostatycznego $V_{(x,y)}$ na siatce XY typu D (ptr_V)

417 Podczas rozwiązywania problemu potencjały elektrod nie będą się zmieniały.
418 Szukamy rozkładu potencjału dla punktów reprezentujących próżnię.

419 Metoda relaksacyjna jest metodą „kolejnych przybliżeń”. Wykonywanie jej
420 polega na kolejnych iteracjach. Podczas każdej iteracji wykonuje się procedu-
421 rę relaksacyjną dla każdego z węzłów.

422 9 Nazewnictwo w oprogramowaniu Liebmann

423 W oprogramowaniu Liebmann siatka numeryczna jest przedstawiona w postaci
424 tablicy reprezentowanej przez blok pamięci alokowany dynamicznie na sterzie.

| | | | | | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------|
| i_{row} | | | | | | | | | |
| 10 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | |
| 9 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | |
| 8 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | |
| 7 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | |
| 6 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | |
| 5 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | |
| 4 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |
| 3 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | |
| 2 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | i_{col} |

Rysunek 8: Indeksy na siatce XY typu D (ANSI C)

425 rozmiar siatki (liczba wierszy i kolumn):

426 `size_row == 10`

427 `size_col == 8`

428 Uwaga - indeksy i rozmiary są liczone od 1 (wewnątrz algorytmów ANSI C
429 jest to zmieniane). Uznałem, że ważniejsza jest przejrzystość przy rysowaniu
430 tablic np. na papierze.

431 Znając indeks rzędu i indeksu kolumny, możemy wyznaczyć indeks danego
432 punktu siatki (`icp` - „index of cenral point”)

433 `icp = (i_row - 1) * size_col + i_col - 1`

434 gdzie:

435 `i_row == 1, 2, .., size_row`

436 `i_col == 1, 2, .., size_col`

```
437     Przykładowo, chcemy ustawić potencjał o indeksie icp, do wartości 1.0 [V],  
438     możemy użyć notacji wskaźnikowej:  
  
439     i_row = 3  
440     i_col = 4  
441     icp = (i_row - 1) * size_col + i_col - 1  
442  
443     /*== double* ptr_V jest wskaźnikiem do siatki przechowującej potencjały == */  
444  
445     *(ptr_V + icp) = +1.0;
```

Literatura

- [1] P. Grivet, *Electron Optics, Second (revised) English edition*. Pergamon Press Ltd., 1972.
- [2] J. R. Nagel, "Solving the generalized poisson equation using the finite - difference method (fdm).," 2012.
- [3] A. Septier(ed.), *Focusing of Charged Particles*. New York and London, Academic Press, 1967.
- [4] A. Septier(ed.), *Applied Charged Particle Optics, part A*. New York and London, Academic Press, 1980.
- [5] D. W. O. Heddle, *Electrostatic Lens Systems. Second Edition*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2000.
- [6] B. Paszkowski, *Optyka Elektronowa, wydanie II, poprawione i uzupełnione*. Państwowe Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa, 1965.
- [7] B. Paszkowski, *Electron Optics [by] B. Paszkowski. Translated from the Polish by George Lepa. English translation edited by R. C. G. Leckey*. London, Iliffe; New York, American Elsevier Publishing Company Inc., 1968.
- [8] W. community, "Prawo_gaussa_(elektryczność)," 2024.
- [9] W. community, "Twierdzenie ostrogradskiego - gaussa," 2024.
- [10] W. community, "Dywergencja," 2024.
- [11] M. Kulbaka, "Charged particle optics - laplace equation 2d cylindrical zr - relaxation scheme explained," 2024.